

6

Contraintes, puissance, travail et énergie cinétique

Dans cette section, on va d'abord examiner la notion de contrainte géométrique qui se traduit par la présence de forces de contrainte – aussi appelées forces de liaison – dans l'expression des lois du mouvement. Dans un deuxième temps, on étudiera la dynamique du pendule mathématique. Troisièmement, on définira les notions de puissance, de travail et d'énergie cinétique.

6.1 Contraintes géométriques

Les lois de la dynamique décrivent le mouvement d'un point matériel en présence de forces données. En général, le point matériel est soumis à des contraintes extérieures qui déterminent la géométrie du mouvement. Ces **contraintes géométriques** imposent des restrictions cinématiques sur la position, la vitesse et l'accélération qui se traduisent par des conditions mathématiques. Si le mouvement du point matériel a lieu sur une sphère, son rayon en coordonnées sphériques sera constant ce qui a des conséquences importantes sur la dynamique. Si le mouvement a lieu sur une surface horizontale, la coordonnée verticale sera constante.

À présent, on va considérer quelques exemples concrets de contraintes géométriques qui limitent le mouvement d'un point matériel. Le premier exemple est celui d'une bille – que l'on peut considérer comme un point matériel – qui se déplace sur la surface intérieure d'une demi-sphère creuse de rayon R . Pour modéliser la dynamique de la bille astreinte à se déplacer sur cette surface, on utilise des coordonnées sphériques. En coordonnées sphériques, la contrainte géométrique est que la coordonnée radiale r est égale au rayon R de la sphère,

$$r = R = \text{cste} \quad (6.1)$$

Le deuxième exemple est celui d'une bille qui se déplace sur la surface intérieure d'un entonnoir. Pour modéliser la dynamique de la bille astreinte à se déplacer sur cette surface, on utilise des coordonnées cylindriques puisque l'entonnoir présente une symétrie cylindrique, c'est-à-dire qu'il est invariant par rotation autour de l'axe vertical. L'intersection entre l'entonnoir et un plan vertical contenant l'axe vertical de symétrie, donne lieu à deux branches d'hyperbole. En coordonnées cylindriques, la contrainte géométrique est que l'opposé de la coordonnée verticale z est une fonction hyperbolique de la coordonnée radiale ρ ,

$$z = -\frac{1}{\rho} = \text{cste} \quad (6.2)$$

Le troisième exemple est celui d'une bille qui se déplace sur une glissière avec un looping. Pour modéliser la dynamique de la bille astreinte à se déplacer sur cette courbe, on utilise des coordonnées cartésiennes le long de la rampe et des coordonnées polaires au niveau du cercle (Fig. 6.1).

6.1.1 Force de contrainte

Les contraintes géométriques peuvent aussi s'exprimer en termes de **forces de contraintes** appliquées au point matériel. En absence de force de contrainte, le mouvement



Demi-sphère



Entonnoir

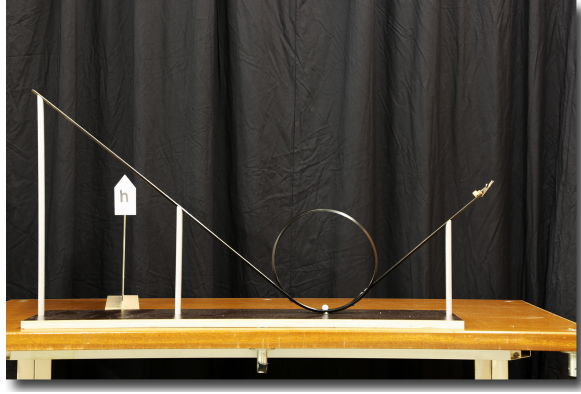
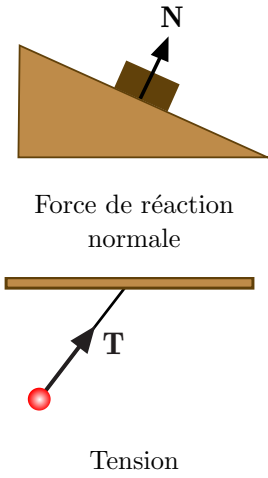


FIGURE 6.1 Le point matériel est astreint à se déplacer une glissière constituée d'une rampe et d'un cercle.



du point matériel peut à priori avoir lieu dans l'ensemble de l'espace à trois dimensions. Pour rendre compte des contraintes géométriques dans l'expression de la loi du mouvement (2.32), il est nécessaire d'introduire des forces de contrainte qui limitent le mouvement du point matériel à une région spécifique de l'espace. Elles empêchent le point matériel d'accélérer dans des directions particulières ce qui fait écho aux contraintes géométriques. Ces forces sont toujours normales à la surface physique sur laquelle le point matériel se déplace et elles sont orthogonales au mouvement du point matériel en tout temps. Par exemple, un point matériel suspendu à un fil peut être en équilibre seulement si une force de liaison ou de contrainte s'oppose à son poids. Cette force c'est la tension T dans le fil. Dans le cas d'un point matériel posé sur une surface horizontale comme le sol, il existe une force de contrainte N appelée la réaction normale du sol sur le point matériel qui est égale et opposée au poids. Si cette force n'était pas incluse dans la loi du mouvement, le point matériel s'enfoncerait dans le sol.

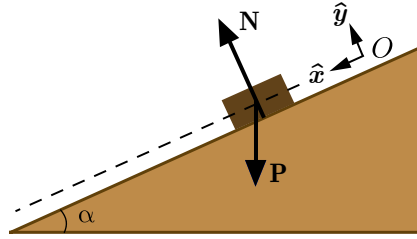


FIGURE 6.2 Le bloc de masse m est astreint à se déplacer sans frottement le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

Pour lier les notions de contrainte géométrique et de force de contrainte, on va considérer comme premier exemple le mouvement sans frottement d'un bloc de masse m , considéré comme un point matériel, sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (Fig. 6.2). En orientant le repère cartésien $(\hat{x}, \hat{y})$ selon la géométrie du plan incliné, avec l'axe Ox orienté parallèlement au plan vers le bas et l'axe Oy orthogonalement au plan vers le haut, la contrainte géométrique est qu'il n'y ait pas de mouvement selon l'axe Oy , c'est-à-dire que la coordonnées de vitesse et d'accélération selon cet axe sont nulles,

$$\dot{y} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{y} = 0 \quad (6.3)$$

Ainsi, l'accélération du bloc est orienté parallèlement au plan,

$$\mathbf{a} = \ddot{x} \hat{x} \quad (6.4)$$

Les causes physiques de ce mouvement particulier est l'action conjointe des deux forces extérieures exercées sur la bloc. Ces forces sont son poids

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} = mg \sin \alpha \hat{x} - mg \cos \alpha \hat{y} \quad (6.5)$$

et la force de contrainte orthogonale au plan qui est la force de réaction normale du plan sur le bloc,

$$\mathbf{N} = N \hat{\mathbf{y}} \quad (6.6)$$

Afin d'obtenir une expression explicite pour la force de réaction normale, on doit déterminer la dynamique du bloc donnée par la loi du mouvement (2.32) qui s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} = m \mathbf{a} \quad (6.7)$$

En projetant la loi vectorielle du mouvement (6.7) selon les lignes de coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ respectivement, compte tenu du poids (6.5) et de la force de réaction normale (6.6) ainsi que de l'accélération (6.4), on obtient les deux équations scalaires suivantes,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad & mg \sin \alpha = m \ddot{x} \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : \quad & -mg \cos \alpha + N = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

La première équation est l'équation du mouvement rectiligne uniformément accéléré du bloc le long du plan incliné vers le bas,

$$\ddot{x} = g \sin \alpha = \text{cste} \quad (6.9)$$

La deuxième équation donne la norme de la force de réaction normale,

$$N = mg \cos \alpha \quad (6.10)$$

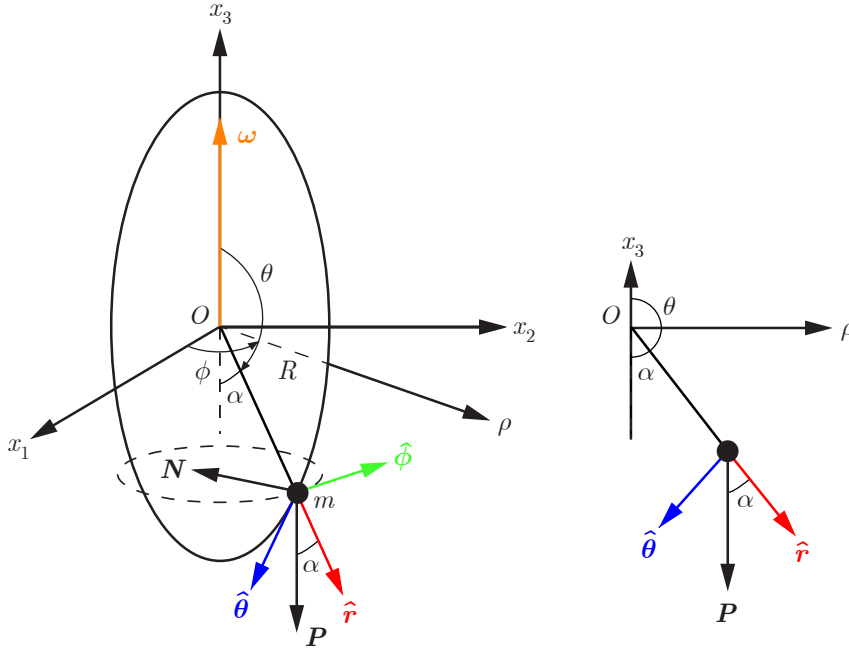
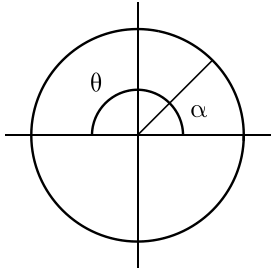


FIGURE 6.3 La bille de masse m est astreinte à se déplacer dans un anneau vertical en rotation à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical Ox_3 .

A présent, on va considérer un deuxième exemple qui est celui d'une bille de masse m couissant dans un anneau vertical de rayon R en rotation autour de son axe de symétrie vertical à vitesse angulaire $\omega = \text{cste}$ (Fig. 5.5). Pour modéliser la dynamique de la bille astreinte à se déplacer sur cette courbe en rotation qui définit une surface, on utilise un repère sphérique $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$. En coordonnées sphériques, les contraintes géométriques sont que la coordonnée radiale r est égale au rayon R de l'anneau et que la dérivée temporelle de la coordonnée tangentielle ϕ est la vitesse angulaire de rotation constante (Fig. 6.3),

$$\begin{aligned} r = R = \text{cste} & \quad \text{ainsi} \quad \dot{r} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{r} = 0 \\ \omega = \dot{\phi} = \text{cste} & \quad \text{ainsi} \quad \dot{\omega} = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$



Cercle
trigonométrique

L'angle aigu α et l'angle obtus θ sont supplémentaires,

$$\alpha + \theta = \pi \quad (6.12)$$

Les fonctions trigonométriques de ces angles satisfont les identité trigonométriques suivantes,

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \theta \\ \cos \alpha &= -\cos \theta \end{aligned} \quad (6.13)$$

Les forces extérieures qui agissent sur le point matériel sont son poids $\mathbf{P}$ et la force de réaction normale $\mathbf{N}$ de l'anneau sur le point matériel. Le poids $\mathbf{P}$ est orienté vers le bas. Dans le plan de l'anneau, la bille peut se déplacer tangentiellement selon le vecteur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Par conséquent, en toute généralité, la force de réaction normale $\mathbf{N}$ a deux composantes non nulles qui sont orthogonales au vecteur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Ainsi, compte tenu des identités trigonométriques (6.13), le poids $\mathbf{P}$ et la force de réaction normale $\mathbf{N}$ s'écrivent en coordonnées sphériques comme (Fig. 6.3),

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m\mathbf{g} = mg \left(\cos \alpha \hat{\mathbf{r}} + \sin \alpha \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) = mg \left(-\cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \\ \mathbf{N} &= N_r \hat{\mathbf{r}} + N_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Afin d'obtenir une expression explicite pour la force de réaction normale, on doit déterminer la dynamique de la bille donnée par la loi du mouvement (2.32) qui s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} = m\mathbf{a} \quad (6.15)$$

Compte tenu des contraintes géométriques (6.11) l'expression générale (5.20) de l'accélération en coordonnées sphériques se réduit ici à,

$$\mathbf{a} = -R \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right) \hat{\mathbf{r}} + R \left(\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2R\omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (6.16)$$

En projetant la loi vectorielle du mouvement (6.15) selon les lignes de coordonnées sphériques de vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ respectivement, compte tenu des expressions (6.14) pour les forces extérieures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{N}$ ainsi que de l'expression (6.16) pour l'accélération $\mathbf{a}$, on obtient trois équations scalaires,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{r}} : \quad & -mg \cos \theta + N_r = -mR \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right) \\ \text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} : \quad & mg \sin \theta = mR \left(\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta \right) \\ \text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : \quad & N_\phi = 2mR\omega \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (6.17)$$

La première et la troisième équation donnent l'expression des coordonnées N_r et N_ϕ de la force de réaction normale $\mathbf{N}$. La deuxième équation est l'équation du mouvement de la bille dans l'anneau qui dépend que de l'angle θ étant donné que les autres paramètres sont fixés. Compte tenu des équations (6.17), la force de réaction normale $\mathbf{N}$ s'écrit explicitement,

$$\mathbf{N} = m \left(g \cos \theta - R\dot{\theta}^2 - R\omega^2 \sin^2 \theta \right) \hat{\mathbf{r}} + 2mR\omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (6.18)$$

La force de réaction normale $\mathbf{N}$ est orthogonale au mouvement non-contraint qui a lieu selon $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ où le degré de liberté est l'angle θ . L'équation du mouvement non contraint selon la ligne de coordonnée nodale peut être divisée par la masse m de la bille et le rayon de l'anneau est mise sous la forme suivante,

$$\ddot{\theta} - \left(\omega^2 \cos \theta + \frac{g}{R} \right) \sin \theta = 0 \quad (6.19)$$

Pour déterminer les angles d'équilibre de la bille dans l'anneau, on impose la condition d'équilibre, à savoir que l'angle d'équilibre θ_0 est constant,

$$\dot{\theta}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta}_0 = 0 \quad (6.20)$$

Ainsi, l'équation du mouvement (6.19) évaluée à l'angle d'équilibre θ_0 se réduit à,

$$\sin \theta_0 \left(\omega^2 \cos \theta_0 + \frac{g}{R} \right) = 0 \quad (6.21)$$

Par conséquent, il y a deux angles d'équilibre $\theta_0 \in \{\theta_1, \theta_2\}$ où $\pi/2 < \theta_1, \theta_2 \leq \pi$:

$$\sin \theta_1 = 0 \quad \text{ainsi} \quad \theta_1 = \pi \quad (6.22)$$

$$\cos \theta_2 = -\frac{g}{R\omega^2} \quad \text{ainsi} \quad \theta_2 = \arccos\left(-\frac{g}{R\omega^2}\right) \quad \text{si} \quad R\omega^2 \geq g \quad \text{car} \quad -1 \leq \cos \theta_2 < 0$$

L'angle d'équilibre θ_2 n'existe que si la vitesse angulaire est égale ou supérieure à une valeur seuil, c'est à dire $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$. En-dessous de cette valeur seuil, l'angle d'équilibre est θ_1 .

6.2 Pendule mathématique

Il existe plusieurs types de pendules. Le pendule le plus simple à décrire est appelé le **pendule mathématique** par opposition à un pendule plus réaliste que l'on appelle le **pendule physique**. Dans le modèle du pendule mathématique, on considère que toute la masse est contenue en un point suspendu au bout d'un fil de masse négligeable alors que dans le modèle du pendule physique on ne néglige pas la masse et l'inertie du fil. Le pendule mathématique est aussi parfois appelé pendule simple. Ici, on privilégiera le terme de pendule mathématique pour des raisons qui deviendront plus claires en fin de section.

6.2.1 Loi et équation du mouvement

On considère un pendule modélisé comme un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle de rayon ℓ constant dans un plan vertical et soumis au champ gravitationnel terrestre.

Pour modéliser mathématiquement ce pendule, on choisit des coordonnées polaires (r, ϕ) dans un plan vertical, c'est-à-dire des coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) avec la contrainte géométrique $z = 0$ où z est la coordonnée horizontale. On prend comme origine O le point d'attache du fil. La contrainte géométrique dans le plan d'oscillation du pendule est de conserver la longueur ℓ du pendule (Fig. 6.4),

$$\rho = \ell = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \dot{\rho} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\rho} = 0 \quad (6.23)$$

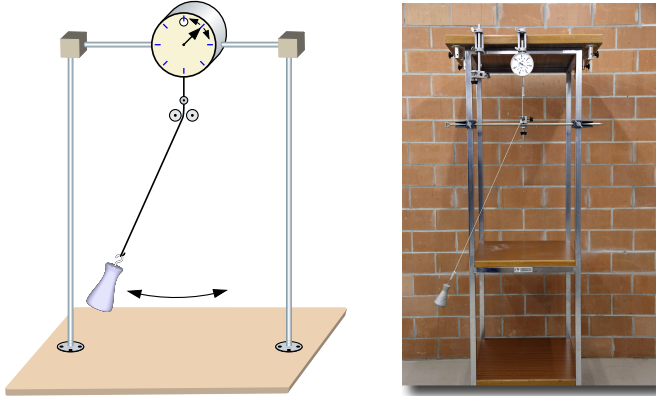


FIGURE 6.4 Le pendule mathématique est constitué d'une masse attachée à un fil de masse négligeable oscillant dans un plan vertical. Un dynamomètre mesure la tension dans le fil, qui est maximale lorsque le fil est vertical.

Les forces extérieures qui agissent sur le point matériel sont son poids $\mathbf{P}$ et la tension $\mathbf{T}$ dans le fil. Le poids $\mathbf{P}$ est orienté vers le bas. Le pendule oscille dans un plan vertical et la tension est orthogonale au mouvement tangentiel de la masse. Ainsi la tension $\mathbf{T}$ est radiale et orientée vers le point d'attache puisqu'elle s'oppose au poids $\mathbf{P}$. Ainsi, le poids $\mathbf{P}$ et la tension $\mathbf{T}$ s'écrivent en coordonnées polaires dans le plan vertical comme (Fig. 6.5),

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} = mg \left(\cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = -T \hat{\rho} \quad (6.24)$$



Prof. Tournesol

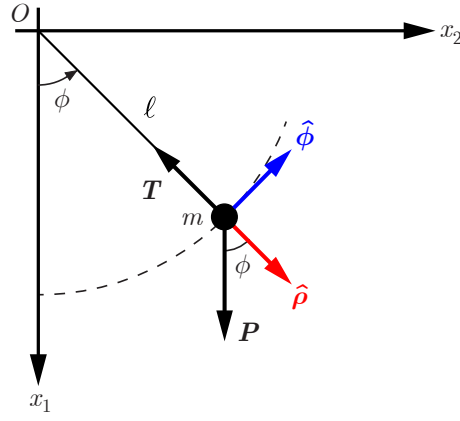


FIGURE 6.5 La masse m suspendue à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ oscille dans le plan vertical Ox_1x_2 .

La dynamique de la masse est donnée par la loi du mouvement (2.32) qui s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} = m \mathbf{a} \quad (6.25)$$

Compte tenu des contraintes géométriques (6.23) l'expression générale (5.10) de l'accélération en coordonnées cylindriques se réduit dans le plan vertical $z = 0$ à,

$$\mathbf{a} = -\ell \dot{\phi}^2 \hat{\rho} + \ell \ddot{\phi} \hat{\phi} \quad (6.26)$$

En projetant la loi vectorielle du mouvement (6.25) selon les deux axes de coordonnées $\hat{\rho}$ et $\hat{\phi}$ respectivement, compte tenu des expressions (6.24) pour les forces extérieures $\mathbf{P}$ et $\mathbf{T}$ ainsi que de l'expression (6.26) pour l'accélération $\mathbf{a}$, on obtient deux équations scalaires,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\rho} : \quad & mg \cos \phi - T = -m\ell \dot{\phi}^2 \\ \text{selon } \hat{\phi} : \quad & -mg \sin \phi = m\ell \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (6.27)$$

La première équation (6.27) donne l'expression de la norme de la tension dans le fil qui dépend de l'angle ϕ et de la vitesse angulaire scalaire $\dot{\phi}$,

$$T = m \left(g \cos \phi + \ell \dot{\phi}^2 \right) \quad (6.28)$$

La deuxième équation (6.27) est l'équation du mouvement tangentiel de la masse m qui peut être mise sous la forme,

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell} \sin \phi = 0 \quad (6.29)$$

ce qui montre que le mouvement est indépendant de la masse m .

6.2.2 Petites oscillations autour de l'équilibre

Avant de discuter la solution générale de l'équation du mouvement (6.29), on va considérer un cas particulier, celui des petites oscillations autour de l'angle d'équilibre lorsque le fil est vertical, c'est-à-dire lorsque $\sin \phi_0 = 0$, ce qui implique que,

$$\phi_0 = 0 \quad (6.30)$$

Par inspection graphique (Fig. 6.6), on constate que dans la limite des petites oscillations, c'est-à-dire $\phi \ll 1$,

$$\sin \phi = \phi \quad (6.31)$$

Dans cette limite, en utilisant la formule (1.21) du développement limité au premier ordre de la fonction $\sin \phi$ autour de $\phi = 0$, on obtient,

$$\sin \phi = \sin 0 + \left(\frac{d \sin \phi}{d \phi} (0) \phi \right) = 0 + \cos 0 \phi = \phi \quad (6.32)$$



Mouvement
indépendant de la
masse

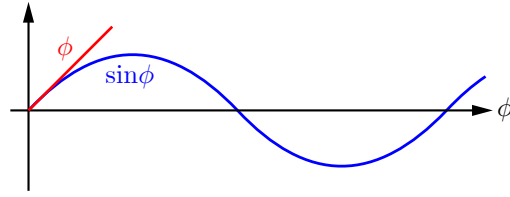


FIGURE 6.6 La fonction trigonométrique $\sin \phi$ coïncide avec la fonction ϕ dans la limite des petits angles, c'est-à-dire $\phi \ll 1$.

Compte tenu de la relation (6.32) dans la limite des petites oscillations, l'équation du mouvement se réduit en bonne approximation à,

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell} \phi = 0 \quad (6.33)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique où la variable est l'angle ϕ ,

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 \quad (6.34)$$

D'après les définitions (4.7), (4.21) et (4.20), la pulsation ω et la période d'oscillation T s'expriment comme,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (6.35)$$

Ainsi, pour de petites oscillations autour de la position d'équilibre, la pulsation ω et la période d'oscillation T du pendule sont indépendantes de l'angle initial ϕ_0 . Compte tenu de l'abscisse curviligne (4.79), l'accélération tangentielle s'écrit,

$$s = \ell \phi \quad \text{ainsi} \quad \ddot{s} = \ell \ddot{\phi} \quad (6.36)$$

En multipliant l'équation du mouvement harmonique oscillatoire du pendule (6.34) par sa longueur ℓ , elle s'exprime alors en termes de l'abscisse curviligne et de sa dérivée temporelle seconde comme,

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0 \quad (6.37)$$

6.2.3 Période d'oscillation générale

Pour de plus grands angles initiaux ϕ_0 , l'expression de la période d'oscillation T dépend de l'angle initial ϕ_0 . Pour déterminer l'expression générale de la période d'oscillation T , on la multiplie l'équation du mouvement (6.29) par $\dot{\phi}$ ce qui donne,

$$\dot{\phi} \ddot{\phi} + \frac{g}{\ell} \dot{\phi} \sin \phi = 0 \quad (6.38)$$

Afin de pouvoir intégrer l'équation du mouvement (6.38) par rapport au temps, on la multiplie par l'intervalle de temps infinitésimal dt ,

$$\dot{\phi} d\dot{\phi} + \frac{g}{\ell} \sin \phi d\phi = 0 \quad \text{où} \quad d\dot{\phi} = \ddot{\phi} dt \quad \text{et} \quad d\phi = \dot{\phi} dt \quad (6.39)$$

Les conditions initiales sur l'angle ϕ et la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ sont les suivantes,

$$\phi(0) = \phi_0 \quad \text{et} \quad \dot{\phi}(0) = 0 \quad (6.40)$$

Compte tenu des conditions initiales (6.40), l'intégrale de l'équation du mouvement (6.39) du temps initial 0 au temps t s'écrit,

$$\int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}' d\dot{\phi}' + \frac{g}{\ell} \int_{\phi_0}^{\phi} \sin \phi' d\phi' = 0 \quad (6.41)$$

Le résultat de cette intégrale est,

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell} (\cos \phi - \cos \phi_0) = 0 \quad (6.42)$$

Ainsi, la vitesse angulaire s'écrit,

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0} \quad (6.43)$$

On peut maintenant exprimer l'intervalle de temps infinitésimal dt comme fonction de la variation infinitésimale de l'angle $d\phi$,

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} \quad (6.44)$$

L'expression de l'intervalle de temps entre le temps initial $t = 0$ et le temps t est obtenue par intégration de l'équation (6.44) par rapport au temps,

$$t = \int_0^t dt' = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_{\phi_0}^{\phi(t)} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos \phi' - \cos \phi_0}} \quad (6.45)$$

Initialement, la position angulaire du pendule est ϕ_0 et au bout d'un quart de période d'oscillation $T/4$, le pendule se trouve au minimum en $\phi = 0$. La période d'oscillation T est la somme de quatre quarts de période identiques,

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_{\phi_0}^0 \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos \phi' - \cos \phi_0}} \quad (6.46)$$

L'équation (6.46) est une intégrale elliptique de première espèce. La résolution de cette intégrale est longue et compliquée. Elle fait notamment intervenir les polynômes de Legendre. Au final, la solution s'écrit,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \left(\frac{\phi_0}{2} \right) \right] \quad (6.47)$$

Le développement limité pair au 4^e ordre de la période (6.47) s'écrit,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \phi_0^2 + \frac{11}{3072} \phi_0^4 + \mathcal{O}(6) \right) \quad (6.48)$$

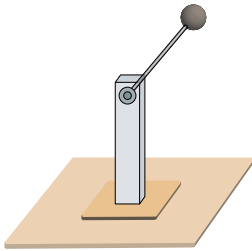
Le premier terme entre parenthèses de l'expression (6.47) de la période T correspond à la période d'oscillation dans la limite des petites oscillations (Fig. 6.7), c'est-à-dire $\phi_0 \ll 1$,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \mathcal{O}(2) \right) \quad (6.49)$$

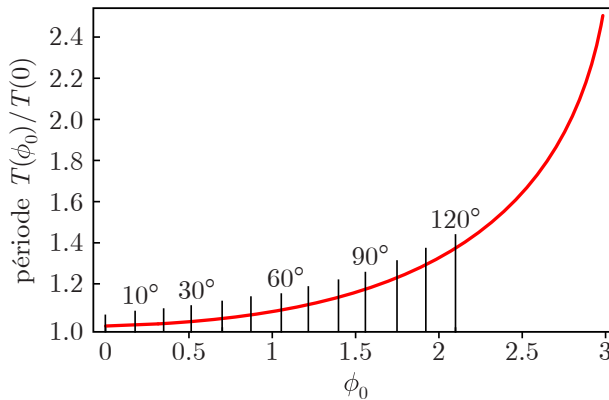
Le terme suivant est un terme correctif du 2^e ordre en ϕ_0^2 et le dernier terme est un terme correctif du 4^e ordre en ϕ_0^4 (Tab. 6.1). On néglige les termes d'ordre supérieur.



Adrien-Marie
Legendre



Pendule



ϕ_0	$\frac{1}{16} \phi_0^2$	$\frac{11}{3072} \phi_0^4$
10°	0.19 %	0.003 %
20°	0.76 %	0.005 %
30°	1.7 %	0.027 %
60°	6.9 %	0.43 %
90°	15 %	2.2 %
120°	27 %	6.9 %

TABLE 6.1 Termes correctifs

FIGURE 6.7 La période d'oscillation T du pendule dépend de la position angulaire initiale ϕ_0 .

6.3 Puissance, travail et énergie cinétique

Dans cette section, on va définir des notions scalaires centrales en mécanique et plus généralement en physique. Ces notions sont la puissance exercée par une force sur un point matériel, le travail accompli par cette force et l'énergie cinétique du point matériel par rapport à un référentiel donné.

6.3.1 Intégrale du mouvement

Le travail $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^{\text{ext}})$ effectué par une force extérieure $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ d'une position initiale $\mathbf{r}_1$ à une position finale $\mathbf{r}_2$ et l'énergie cinétique T sont des grandeurs extensives obtenues en intégrant la loi vectorielle du mouvement (2.32). Pour obtenir une grandeur scalaire à l'aide d'une équation vectorielle, il faut prendre le produit scalaire de cette équation avec une grandeur vectorielle colinéaire à tout mouvement : la vitesse. Le produit scalaire de l'équation vectorielle du mouvement (2.32) et du vecteur vitesse s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \quad (6.50)$$

En multipliant cette équation par l'intervalle de temps infinitésimal dt , on obtient,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad \text{où} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad \text{et} \quad d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt \quad (6.51)$$

L'intégrale de l'équation du mouvement (6.51) le long de la trajectoire Γ décrite par le chemin $\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}$ qui va de la position initiale $\mathbf{r}_1$ à la position finale $\mathbf{r}_2$ s'écrit (Fig. 6.8),

$$\int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (6.52)$$

Le résultat de l'intégrale du membre de droite de la relation (6.52) est le suivant,

$$\sum \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}=\mathbf{v}_2} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 \quad (6.53)$$

où l'ordre de l'intégrale, qui est une somme continue, et de la somme discrète a été permuté par linéarité.

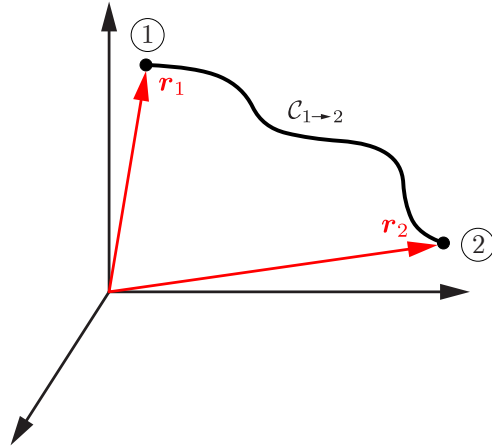


FIGURE 6.8 Trajectoire courbe $\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}$ qui va de la position initiale $\mathbf{r}_1$ à la position finale $\mathbf{r}_2$.

6.3.2 Travail

Le travail infinitésimal $\delta W(\mathbf{F})$ effectué par une force extérieure $\mathbf{F}$ lors d'un déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}$ est une grandeur scalaire obtenu par produit scalaire entre ces des vecteurs,

$$\delta W(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \|\mathbf{F}\| \|d\mathbf{r}\| \cos \theta \quad (6.54)$$

où θ est l'angle entre le vecteur force $\mathbf{F}$ et le vecteur déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}$ (Fig. 6.9). Le travail effectué par la force $\mathbf{F}$ lors d'un déplacement d'une position initiale $\mathbf{r}_1$ à une

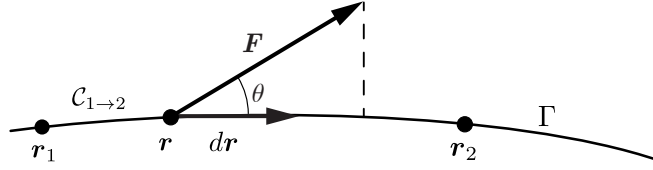


FIGURE 6.9 Projection de la force $\mathbf{F}$ sur la trajectoire Γ décrite par le chemin $C_{1 \rightarrow 2}$.

position finale $\mathbf{r}_2$ est la somme des travaux infinitésimaux (6.54) effectués le long de la trajectoire Γ décrite par le chemin $C_{1 \rightarrow 2}$ qui va de la position initiale $\mathbf{r}_1$ à la position finale $\mathbf{r}_2$ (Fig. 6.8). Cette somme continue est une intégrale qui s'écrit,

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}) = \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \delta W(\mathbf{F}) = \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (6.55)$$

L'unité du travail dans le système international d'unités est le Joule noté $[J] = [\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$ en l'honneur de James Prescott Joule qui a démontré l'équivalence entre travail et chaleur. A titre d'exemple, on peut mentionner le travail effectué par les forces musculaires d'un randonneur lors de l'ascension du Mont-Blanc ou le travail effectué par la force de frottement cinétique lors du freinage d'un véhicule.



James Prescott Joule

6.3.3 Énergie cinétique

En absence de force extérieure résultante, l'énergie cinétique est une **grandeur conservée**, c'est-à-dire qu'elle ne change pas au cours du temps. Le mouvement d'un point matériel de masse m en absence de force extérieure résultante est donc entièrement caractérisé par sa quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et sa vitesse $\mathbf{v}$. L'**énergie cinétique** T est une grandeur scalaire et extensive. La variation infinitésimale de l'énergie cinétique dT est donc le produit scalaire de la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et de la variation infinitésimale de vitesse $d\mathbf{v}$.

$$dT = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{v} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (6.56)$$

Ainsi, l'énergie cinétique est obtenu par intégration de la variation de l'énergie cinétique infinitésimale,

$$T = \int_0^T dT' = m \int_0^{\mathbf{v}} \mathbf{v}' \cdot d\mathbf{v}' = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (6.57)$$

où le symbole prime a été ajouté sur la variable d'intégration afin de ne pas la confondre avec la borne d'intégration. L'unité de l'énergie cinétique T dans le système international d'unités est le Joule noté $[J] = [\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$.

L'expression (6.56) de la variation infinitésimale de l'énergie cinétique dT est très intéressante. L'énergie cinétique s'exprime comme le produit d'une grandeur extensive et d'une grandeur intensive. Ceci est le cas de toutes les formes d'énergie qui sont étudiées dans le cadre de la thermodynamique. Comme la quantité de mouvement est définie à une constante près, l'énergie cinétique l'est aussi. De plus, comme l'énergie cinétique (6.57) est une fonction quadratique de la vitesse $\mathbf{v}$, il doit exister un minimum d'énergie cinétique. En relativité restreinte, l'énergie cinétique n'est pas une fonction quadratique de la vitesse, mais elle peut être écrite comme une somme de puissances paires de la vitesse ce qui garantit aussi l'existence d'un minimum.

Historiquement, le concept de "force vive" dont l'expression est $m \mathbf{v}^2$ a été proposé en premier par Gottfried Wilhelm Leibniz. Il a fallu attendre un siècle et demi pour voir apparaître le terme d'énergie cinétique avec le bon facteur $1/2$ dans les travaux de Gaspard-Gustave de Coriolis.



Gottfried Wilhelm
Leibniz

6.3.4 Théorème de l'énergie cinétique

Théorème 6.1. La somme des travaux $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^{ext})$ effectués par les forces extérieures $\mathbf{F}^{ext}$ sur un point matériel de masse m d'une position initiale $\mathbf{r}_1$ à une position finale $\mathbf{r}_2$ est égale à la variation d'énergie cinétique $\Delta T_{1 \rightarrow 2}$,

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^{ext}) = \Delta T_{1 \rightarrow 2} \quad (6.58)$$

Démonstration La variation d'énergie cinétique (6.57) d'un point matériel d'une position initiale $\mathbf{r}_1$ à une position finale $\mathbf{r}_2$ s'écrit,

$$\Delta T_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 \quad (6.59)$$

Compte tenu de la définition (6.55) du travail effectué sur un point matériel lors de son déplacement d'une position initiale $\mathbf{r}_1$ à une position finale $\mathbf{r}_2$ et de sa variation d'énergie cinétique (6.59), l'intégrale de l'équation du mouvement (6.60) est le théorème de l'énergie cinétique,

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^{ext}) = \sum \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}^{ext} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 = \Delta T_{1 \rightarrow 2} \quad (6.60)$$

□

6.3.5 Puissance

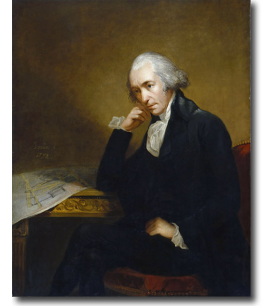
La **puissance** P d'une force $\mathbf{F}$ exercée sur un point matériel est une grandeur scalaire extensive qui rend compte de la capacité de la force à accélérer ou à freiner le point matériel, c'est-à-dire à modifier son état de mouvement. Le mouvement du point matériel est décrit par le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ qui est colinéaire au mouvement. Comme la puissance est une grandeur scalaire, elle est donc définie comme le produit scalaire entre le vecteur force $\mathbf{F}$ et le vecteur vitesse $\mathbf{v}$,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (6.61)$$

L'unité de la puissance dans le système international d'unités est le Watt noté $[W] = [kg m^2 s^{-3}]$, en l'honneur de James Watt qui a joué un rôle considérable dans le développement des machines à vapeur.

Lorsque la force $\mathbf{F}$ est appliquée dans la direction du mouvement, elle accélère le point matériel, ainsi sa puissance est positive, c'est-à-dire $P > 0$. Lorsque la force $\mathbf{F}$ est appliquée dans la direction opposée au mouvement, elle freine le point matériel, ainsi sa puissance est négative, c'est-à-dire $P < 0$. Lorsque la force est appliquée dans une direction orthogonale au mouvement, sa puissance est nulle, c'est-à-dire $P = 0$.

La notion de puissance est extrêmement utile en mécanique pour comparer quantitativement le fonctionnement de différentes machines. Ces machines peuvent être des moteurs mécaniques de tout genre (Fig. 6.10) ou même des muscles humains.



James Watt

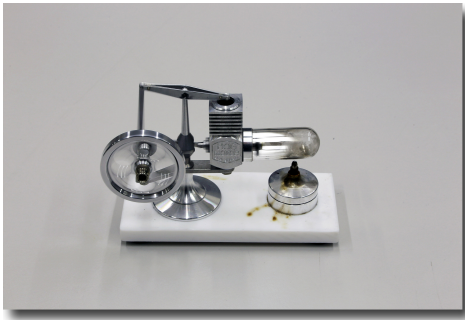


FIGURE 6.10 Moteur de Stirling : un brûleur rempli d'alcool à brûler chauffe l'air à l'intérieur d'un cylindre, fournissant ainsi de la chaleur au moteur qui est activé par le lancement du volant d'inertie. Moteur à dépression : moteur à air chaud qui aspire la flamme au moyen d'une soupape (bruit caractéristique)

Compte tenu des définitions du travail (6.55) et de la puissance (6.61), le travail effectué

par une force $\mathbf{F}$ exercée sur un point matériel est l'intégrale par rapport au temps de la puissance de cette force sur le point matériel,

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}) = \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt \quad (6.62)$$

Pour conclure cette section, voici un tableau récapitulatif (Tab. 14.1) résumant les unités physiques des grandeurs principales en mécanique exprimées dans le système international d'unités. Après avoir établi un résultat physique, je vous encourage fortement – spécialement durant l'examen – à procéder systématiquement à l'**analyse dimensionnelle**, c'est-à-dire à vérifier la cohérence des unités physiques des grandeurs apparaissant dans l'expression analytique du résultat. Cela vous évitera de faire des fautes d'inattention et améliorera sensiblement votre note finale !

TABLE 6.2 Unités physiques des grandeurs mécaniques principales (système international).

Grandeur	Unité (SI)	Abréviation
Masse	kilogramme	[kg]
Longueur	mètre	[m]
Temps	seconde	[s]
Vitesse		[m s ⁻¹]
Accélération		[m s ⁻²]
Force	Newton	[N] = [kg m s ⁻²]
Travail, énergie	Joule	[J] = [kg m ² s ⁻²]
Puissance	Watt	[W] = [kg m ² s ⁻³]